Title	Part II 多種系 (生物数学イッキ読み・研究交流)
Author(s)	竹内, 康博; 黒田, すゞ香
Citation	数理解析研究所講究録 (2005), 1448: 94-104
Issue Date	2005-09
URL	http://hdl.handle.net/2433/47692
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1448 巻 2005 年 94-104

Part II 多種系

静岡大学大学院システム工学研究科 竹内 康博 (Yasuhiro TAKEUCHI)
Department of Systems Engineering, Faculty of Engineering, Shizuoka University
静岡大学工学部システム工学科 黒田 すヾ香 (Suzuka KURODA)
Department of Systems Engineering, Faculty of Engineering, Shizuoka University

1 同一資源を争う多種系

ここからは二つ以上の種が互いに関係しながら存在する場合を議論する。地域的変化は考えず、生物の大きさや年齢なども無視して個体数のみに注目したモデルの理論である。まずはじめは同一資源を争う多種の関係を議論する。

1.1

同一資源を争う2種の競争の様子は同一資源を争う n 種の競争に拡張できる。

$$\frac{dN_r}{dt} = N_r(\varepsilon_r - \gamma_r F(N_1, \cdots, N_n)) \tag{1}$$

について考察する。N_r は種 r の生物量、十分豊富な資源の供給のもとに単独で同一地域に住む場合の種 r の増殖係数を ε_r とする（正または負または 0)。$\gamma_r > 0$ は，他種が存在することによる利用可能な資源が減少することによる種 r の増殖率の減少を表す。(γ_r が小さい場合、資源の減少に対して抵抗力が強いことを示す。) $F(N_1, \cdots, N_n) \geq 0$ を単位時間に食べられた資源量とし、各変数 N_r に対して単調増加する。ただし、$N_1 = \cdots = N_n = 0$ のとき $F(N_1, \cdots, N_n) = 0$、$N_r \longrightarrow \infty$ のとき $F \longrightarrow \infty$ であり、連続的微分可能な関数である。
(1) 式から

$$\frac{1}{\gamma_r N_r}\frac{dN_r}{dt} - \frac{1}{\gamma_s N_s}\frac{dN_s}{dt} = \frac{\varepsilon_r}{\gamma_r} - \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s}$$

これを解く。

$$\frac{N_r^{\frac{1}{\gamma_r}}}{N_s^{\frac{1}{\gamma_s}}} = Ce^{(\frac{\varepsilon_r}{\gamma_r} - \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s})t}$$

ただし $C > 0$ の定数とする。

1.2

種 r の増殖係数と資源減少による増殖率の減少係数の比 $\frac{\varepsilon_r}{\gamma_r}$ を大きい種から番号をつける。(ここで表されているのは、「第1種が一番効率よく資源を利用している」ということ) ここでイコール (=) がないのはイコールである種同士を同種と考えているからである。

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} > \cdots > \frac{\varepsilon_r}{\gamma_r}$$

と仮定する。明らかに $r < s$ ならば、

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_r^{\frac{1}{\gamma_r}}}{N_s^{\frac{1}{\gamma_s}}} = \infty$$

である。よって、$t \to \infty$ で，$N_r \to \infty$、または $N_s \to 0$ となる。ただし、(1) 式より $N_r \to \infty$ のとき $F \to \infty$ から、$\frac{dN_r}{dt} < 0$ となり前者は矛盾。
よって同一資源を争う多種系では残れるのは一種だけとなる。この場合は第1種だけが生き残れることになる。

2 捕食者・被食者系

次に議論していくのは、食べる、食べられるの関係である。

2.1 当量仮説

当量仮説とは、

(食べられたr種の総重量) ÷ (s種の平均個体重量) = (s種の発生個体数)

のことを表す。

種 r の個体数 N_r と種 s の個体数 N_s の遭遇が N_rN_s に比例しているとすると、種 r と種 s が dt 時間に遭遇する確率は $m_{rs}N_rN_sdt$ と表される。また、種 r と種 s との遭遇で、種 r が種 s に食べられる確率を $p_{rs}(0 < p_{rs} < 1)$ とすると、$p_{rs}m_{rs}N_rN_sdt$ は種 r が dt 時間に種 s に食べられる数を表す。

$$N_1 = \frac{P_1}{\beta_1}, \cdots, N_r = \frac{P_r}{\beta_r}, \cdots, N_n = \frac{P_n}{\beta_n}$$

は個々の種の個体数を表す。ここで β_r は種 r の平均個体重量、P_r は種 r の総重量を表している。種 r が種 s に食べられると種 r の総重量は $P_r - \beta_r$, 種 s の総重量は $P_s + \beta_r$ となる。それぞれの個体数は、

$$\frac{P_r - \beta_r}{\beta_r} = N_r - 1, \frac{P_r + \beta_r}{\beta_s} = N_s + \frac{\beta_r}{\beta_s}$$

と表せる。$a_{rs} \equiv \beta_r p_{rs} m_{rs}$ とすると、dt 時間の s 種の増加数は、

$$m_{rs}p_{rs}N_rN_s\frac{\beta_r}{\beta_s}dt = a_{rs}N_rN_s\frac{1}{\beta_s}dt$$

である。種 s の増加総重量、種 r の減少総重量は以下のとおりである。

$$a_{rs}N_rN_s\frac{1}{\beta_s}dt \times \beta_s = a_{rs}N_rN_s, -a_{rs}N_rN_s = a_{sr}N_rN_s(-a_{rs} = a_{sr})$$

ただし、ここでは『2種以上の出会いはない』ものとする。

2.2 モデル

上で述べた当量仮説を元に一般化のモデルが立てられる。種 r が単独で存在する場合の種 r の増殖率を ε_r とする．種 r が他の種とともに生息する場合，時間区間 dt における種 r の変化量は

$$dN_r \quad = \quad \varepsilon_r N_r dt + \frac{1}{\beta_r}\sum_{s=1}^{n} a_{sr}N_rN_sdt$$

で与えられる。このモデルを整理すると、

$$\beta_r\frac{dN_r}{dt} \quad = \quad (\beta_r\varepsilon_r + \sum_{s=1}^{n} a_{sr}N_s)N_r \quad (r = 1, \ldots, n) \qquad (B)$$

となる。ただし $-a_{rs} = a_{sr}, a_{rr} = 0, \beta_r > 0$ である。

このモデルはいろいろな生物モデルに拡大できる。その例をいくつか述べよう。

例) 1 捕食者・1 被食者系

(B) 式について $r = 1, 2$ で考える。

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1)N_2 \end{cases}$$

このモデルはよく知られる、初期のロトカ-ボルテラ方程式である。
例）N_1 が N_2 を食べ、N_2 が N_3 を食べ、$\cdots N_n$ は食べられるだけ

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt}=(\varepsilon_1-\gamma_1' N_2)N_1 \\ \frac{dN_2}{dt}=(\varepsilon_2-\gamma_2 N_1+\gamma_2' N_3)N_2 \\ \vdots \\ \frac{dN_n}{dt}=(\varepsilon_n-\gamma_n N_{n-1})N_n \end{cases}$$

ただし、$\gamma_2,\gamma_3,\cdots,\gamma_n>0$、$\gamma_1',\gamma_2',\cdots,\gamma_{n-1}'>0$ とする。

$$\gamma_1'=\frac{a_{21}}{\beta_1},\gamma_2=\frac{a_{21}}{\beta_2},\gamma_2'=\frac{a_{32}}{\beta_2},\gamma_3=\frac{a_{32}}{\beta_3},\cdots,\gamma_n=\frac{a_{n,n-1}}{\beta_n}$$

2.3 モデルの性質

ここで (B) 式の一般的な結果を述べる。

定理 2.1　少なくとも 1 つの ε_r が正ならば、全種が絶滅することはない

(証明)
$\varepsilon_r>0, N_1,N_2,\cdots,N_n<\eta, \sum_{s=1}^{n}\frac{|a_{rs}|}{\beta_r}=p_r$ とおく。
(B) 式を両辺 $\beta_r N_r$ で割り、計算する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_r}\frac{dN_r}{dt} &= \varepsilon_r+\frac{1}{\beta_r}\sum_{s=1}^{n}a_{sr}N_s \\ &\geq \varepsilon_r-(\frac{1}{\beta_r}\sum_{s=1}^{n}|a_{sr}|)\eta \\ &= \varepsilon_r-p_r\eta \end{aligned}$$

全ての i について $N_i\to 0$ とすると，$0<\eta\ll 1, p_r>0, \varepsilon_r>0$ から $\varepsilon_r-p_r\eta=l>0$ が $t\geq t_0$ で成り立つ t_0 が存在し、

$$N_r > N_r^0 e^{l(t-t_0)}$$

と計算でき、$t\to\infty$ のとき $N_r\to\infty$ となり，全ての $N_i\to 0$ という仮定と矛盾が生じる。
よって定理 2.1 が証明された。

定理 2.2　全ての $\varepsilon_r<0$ のとき，$t\to\infty$ で全ての $N_i\to 0$、全ての $\varepsilon_r>0$ のとき，$t\to\infty$ で全ての $N_i\to\infty$

(証明)
(B) 式において、

$$\varepsilon_r < -\varepsilon \ \ (r=1,2,\cdots,n)$$

とする。ただし、$\varepsilon>0$。(B) 式を $r=1$ から $r=n$ まで両辺足し合わせると、

$$\sum_{r=1}^{n}\beta_r\frac{dN_r}{dt} < -\varepsilon\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r$$

となる。これは、

$$\frac{d}{dt}\ln\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r < -\varepsilon$$

となり、両辺積分すると、

$$\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r \quad < \quad \sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r^0 e^{-\varepsilon t}$$

と計算できる。$t\to\infty$ とすると $e^{-\varepsilon t}\to 0$ から $\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r \to 0$、$(\beta_r > 0)$。よって全ての $\varepsilon_r < 0$ のとき、 $t\to\infty$ で全ての $N_r \to 0$ が証明された。
同様にして、

$$\varepsilon_r \quad > \quad \varepsilon \ (r = 1, 2, \cdots, n)$$

とする。ただし、$\varepsilon > 0$ とする。

$$\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r \quad > \quad \sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r^0 e^{\varepsilon t}$$

$t\to\infty$ とすると $e^{\varepsilon t}\to\infty$ から $\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r \to \infty$、$(\beta_r > 0)$。よって全ての $\varepsilon_r > 0$ のとき N_i の和 $\to\infty$ である。

（注）論文では和が無限大になることを示しているだけで，全ての N_i が無限大となることを示していない.

（注）また「全ての種が絶滅するための必要十分条件は，全ての $\epsilon_r < 0$ となることである」とあるが，1 捕食者・1 被食者系において $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 < 0$ のとき $N_1, N_2 \to 0$ となってしまうのであやまりである。

2.4 平衡点

$N_1, N_2, ...N_n$ が一定な方程式を考える。

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \cdots = \frac{dN_n}{dt} = 0$$

(B) 式より、正の平衡点を求める。

$$\beta_r\varepsilon_r + \sum_{s=1}^{n} a_{sr} N_s \quad = \quad 0 \qquad (B')$$

この式は次のように表せるので、

$$\begin{cases} \beta_1\varepsilon_1 + a_{11}N_1 + a_{21}N_2 +, \cdots, + a_{n1}N_n = 0 \\ \beta_2\varepsilon_2 + a_{12}N_1 + a_{22}N_2 +, \cdots, + a_{n2}N_n = 0 \\ \vdots \\ \beta_n\varepsilon_n + a_{1n}N_1 + a_{2n}N_2 +, \cdots, + a_{nn}N_n = 0 \end{cases}$$

基本行列式を考え、

$$det\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad = \quad |A| \qquad (C)$$

とおくと、

$$|A| = \begin{cases} \text{非負} & (n:\text{偶数}) \\ 0 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

となる。ただし、$a_{ij} = -a_{ji}$、$a_{ii} = 0$ とする。
n : 奇数の場合、$A = (a_{ij})$ とすると、

$$\begin{aligned} A + A^T &= 0 \\ |A| &= (-1)^n |A^T| \\ &= -|A| \\ |A| &= 0 \end{aligned}$$

となり、奇数の場合は $|A| = 0$ であることが示される。

3 偶数種

§2 で述べたように、ここでは偶数種における安定性を調べていきたいと思う。

3.1

2.4 から $|A| > 0$ のときを考える。(B) 式を $r = 1$ から $r = n$ まで足し合わせる。

$$\sum_{r=1}^{n} \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \beta_r N_r \tag{2}$$

また、(B) 式の両辺を N_r で割り計算すると、

$$\beta_r \frac{d}{dt} logN_r - \varepsilon_r \beta_r = \sum_{s=1}^{n} a_{sr} N_s \tag{3}$$

と書き表せる。A_{sr} を $|A|$ における a_{sr} の余因子としたときに、

$$\sum_{r=1}^{n} A_{hr} a_{sr} = \begin{cases} 0 & (h \neq s) \\ |A| & (h = s) \end{cases}$$

は A の h 列を s 列で置き換えた行列の h 列の展開を意味している。
(3) 式から

$$\begin{aligned} |A| N_h &= \left(\sum_{r=1}^{n} A_{hr} a_{sr}\right) N_h \\ &= \sum_{r=1}^{n} A_{hr} \left(\beta_r \frac{d}{dt} logN_r - \varepsilon_r \beta_r\right) \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{n} \varepsilon_h \beta_h N_h &= \sum_{h=1}^{n} \varepsilon_h \beta_h \frac{\sum_{r=1}^{n} A_{hr} \left(\beta_r \frac{d}{dt} logN_r - \varepsilon_r \beta_r\right)}{|A|} \\ &= \sum_{h=1}^{n} \varepsilon_h \beta_h \frac{\sum_{r=1}^{n} A_{hr} \beta_r \frac{d}{dt} logN_r}{|A|} \\ &= \sum_{r=1}^{n} q_r \beta_r \frac{dlogN_r}{dt} \end{aligned}$$

ただし、$A_{hr} = -A_{rh}$ で、

$$q_r = \sum_{h=1}^{n} \varepsilon_h \beta_h A_{hr}/|A| \tag{4}$$

とおく。これを (2) 式に代入し計算すると、

$$\frac{d}{dt}\sum_{r=1}^{n}\beta_r(N_r - q_r log N_r) = 0$$

となる。

> 定理 3.1　$q_r > 0(\forall r)$ のとき、解は有界で２つの正の定数の間に入っている。ただし定数は初期値に依存する。（変化有界）

(証明)
上式を計算し整理すると、

$$\Pi_{i=1}^{n}(\frac{e^{N_i}}{N_i^{q_i}})^{\beta_i} = C > 0$$

となる。これを、

$$n_r = \frac{N_r}{q_r}$$

と置き、整理する。

$$\begin{aligned}\Pi_{i=1}^{n}(\frac{e^{n_i}}{n_i})^{\beta_i q_i} &= C' \\ &= C q_1^{q_1\beta_1} q_2^{q_2\beta_2}\cdots q_n^{q_n\beta_n}\end{aligned} \tag{5}$$

ここで、

$$\frac{e^{n_r}}{n_r} \geq e$$

に注意して、(5) 式を整理する。

$$\begin{aligned}(\frac{e^{n_r}}{n_r})^{\beta_r q_r} &= C'/\Pi_{i\neq r}(\frac{e^{n_i}}{n_i})^{\beta_i q_i} \\ &\leq C'/\Pi_{i\neq r}e^{\beta_i q_i} \\ &= K e^{\beta_r q_r}\end{aligned}$$

ただし、

$$K = C'/e^{\sum_{h=1} q_h\beta_h} \geq 1$$

とおくと、

$$\frac{e^{n_r}}{n_r} \leq eK^{\frac{1}{\beta_r q_r}} \tag{6}$$

と書き直せる。ここで左辺を y、n_r を x とおき、(6) 式をグラフで表す。$y = \frac{e^x}{x}(0 < x < \infty, e < y < \infty)$ (FIG.20)

ここではグラフ縦軸が y、横軸を x である。$x = 1$ のとき $y = e$（最小値）である。ここで $\frac{e^x}{x} < y_0 = eK^{\frac{1}{\beta_r q_r}}$ のときは点 A、B が最大値となるので、

$$x^0 < x < x'$$

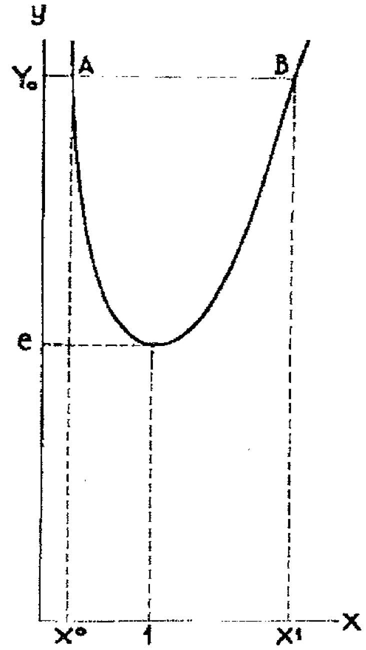

FIG.20

となり、これは x を元に戻すと

$$n_r^0 < n_r < n_r^{'}$$

ということであるので、(B) の解は有界で 2 つの正の定数の間に入っていることが証明でき、定理 3.1 が示せた。

3.2 用語

ここでは用語の定義を行う。

$N(t)$ が個々の種の個体数を表し、2 つの正の値 $(a, b > 0)$ の内部に存在するとき $(a < N(t) < b)$、それを『変化有界』という。また、$t \to \infty$ で $N(t) \to 0$ になる場合、その種は『絶滅』したと考える。変化有界でかつ、区間 $(t_0, +\infty)$ で常に $N(t)$ の最大値と最小値が存在するとき『無限振動』と呼ぶ。(ずっと振動が続くこと)

$N(t)$ が $t > t_0 > 0$ で単調かまたは定数となり、$t \to \infty$ である極限に近づくことを『漸近的な極限を持つ』という。

$N(t)$ が漸近的でなく、$t \to \infty$ で極限を持つ場合『減衰振動』と呼び、$N(t)$ が無限振動で振動が非減衰の場合『非減衰振動』と呼ぶ。

3.3 非減衰

無限振動

> 定理 3.2　$q_r > 0(\forall r)$、$N(0) \neq q$ のとき、少なくとも 1 種は非減衰無限運動をしている。

(証明)

『少なくとも一種は非減衰である』といっているので全ての N_i が減衰すると仮定して矛盾を示す。

(A). $N_i \to q_i$ のとき

(5) 式の右辺は、

$$C'_m = e^{q_1\beta_1+q_2\beta_2+\cdots+q_n\beta_n}$$

となる。これは $n_r = 1(\forall r)$ で成り立つ。ここで定理の条件を考えると、$N(0) \neq q$ であるので $n(0) \neq 1$ である。このときは (5) 式が成り立つための条件を満たさないので矛盾が示せた。

(B).$N_i \to q'_i(q' \neq q)$ のとき
(B) 式を q'_i を使って示し、

$$\beta_r\epsilon_r + \sum_{s=1}^{n} a_{sr}q'_s = 0$$

同様に平衡点を求めると、

$$q'_s = q_s(\forall s)$$

となる。以降　）と同様に考えることができるので矛盾。
よって　）、　）から定理 3.2 が証明できた。

平均の保存則と安定性

定理 3.3　$q_r > 0(\forall r)$ のとき、N_r の (t_0, t) 間の時間平均は $t \to \infty$ で q_r となる。

(証明)
(B) 式を区間 (t_0, t) で積分すると、

$$\frac{\beta_r}{T} log\frac{N_r}{N_r^0} = \varepsilon_r\beta_r + \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{n} a_{sr}\int_{t_0}^{t} N_r(u)du$$

ただし $T = t - t_0$ で、N_r^0 は N_r の $t = t_0$ を表す。ここで、$T \to \infty$ で左辺 $\to 0$（$N(t)$ は変化有界である）ことから平衡点、

$$\beta_r\varepsilon_r + \sum_{s=1}^{n} a_{sr}N_s = 0$$

と比較して考えると、

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t} N_r(u)du = q_s$$

となる。よって定理 3.3 は証明できた。

定理 3.4　$q_r > 0(\forall r)$ のとき、q は常に安定

(証明)
N を平衡点 q の近傍にとると、(5) 式から

$$C' \approx e^{\sum_{h=1}^{n} q_h\beta_h}$$

となり、

$$K = \frac{C'}{e^{\sum_{h=1}^{n} q_h\beta_h}}$$

から、

$$K \approx 1$$

となる。よって (6) 式は、

$$e \leq \frac{e^{n_r}}{n_r} \leq eK^{\frac{1}{q_r\beta_r}}$$

から、K を 1 に十分近くに取れば，N_r は 1 の十分近くにとどまることになり、平衡点 q は常に安定であると証明できた。

3.4 平衡点近傍での小振動解析

> 定理 3.5　$q_r > 0(\forall r)$ 周りの小振動は $n/2$ 個の非減衰振動の重ねあわせで得られ、各振動は固有の周期を持つ。

(証明)
(B') から

$$\varepsilon_r\beta_r = -\sum_{s=1}^{n} a_{sr}q_s$$

を (B) 式に代入すると、

$$\beta_r\frac{dN_r}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{sr}(N_s - q_s)N_r$$

となる。ここに $n_r = \frac{N_r}{q_r}$ を代入し計算する。

$$\beta_r\frac{dn_r}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{sr}q_s(n_s - 1)n_r$$

ここで平衡点の近傍を考えるので $n_r = 1 + \nu_r$ とおく。

$$\beta_r\frac{d\nu_r}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{sr}q_s\nu_s(1 + \nu_r)$$

$|\nu_r(0)| \ll 1$ から $|\nu_r(t)| \ll 1$ であるので高次項を無視して考えると、

$$\beta_r\frac{d\nu_r}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{sr}q_s\nu_s \qquad (7)$$

という形に変形できる。ここから $\nu_r = A_r e^{-xt}$ と置き代入すると、

$$\beta_r A_r x + \sum_{s=1}^{n} a_{sr}q_s A_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \qquad (8)$$

となり、行列形式で表すと、

$$B diag(q_i)\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = 0$$

ただしここで B は、

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{q_1}x & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \frac{\beta_n}{q_n}x \end{bmatrix}$$

である。$q_r \neq 0$ かつ $(A_1, \cdots, A_n) \neq 0$ であるので、$|B| = 0$ を満たす x を見つける。

x が実数だと仮定する。
A_r は実数。(8) 式に $A_r q_r$ を両辺かけ、$r = 1$ から $r = n$ まで足し合わせる。

$$x \sum_{r=1}^{n} \beta_r q_r A_r^2 = 0$$

$\beta_r > 0, q_r > 0$ から $x = 0$ となる。しかし、$x = 0$ ならば $|B| \neq 0$ なので矛盾。よって x は実数ではない。

x が複素数だと仮定する。
A_r は複素数。ただし $x = a + bi$ の場合は A_r、もう一つの解 $x = a - bi$ の場合は A_r' とする。実数の場合と同様にそれぞれの (8) 式に $q_r A_r'$、$q_r A_r$ をかけ、$r = 1$ から $r = n$ まで足し合わせる。

$$\begin{cases} (a+bi) \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \beta_r q_r A_r A_r' + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{sr} q_s A_s q_r A_r' = 0 \\ (a-bi) \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \beta_r q_r A_r A_r' + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{sr} q_s A_r q_r A_s' = 0 \end{cases}$$

両辺足し合わせると、

$$2a \sum_{r=1}^{n} \beta_r q_r A_r A_r' = 0$$

$\beta_r > 0, q_r > 0$ から $a = 0$ となる。よって $x = bi$ より、$|B| = 0$ を満たす x は純虚数のみとなる。また、$|B| = 0$ は行と列を交換しても成立するので、x が (8) 式の解であれば、$-x$ も解である。

次に、$|B| = 0$ を満たす x は純虚数であるとわかったので、解を

$$ib', ib'', \cdots, ib^{(n/2)}; -ib', -ib'', \cdots, -ib^{(n/2)}$$

とおく。これを $ib^{(h)} = 2\pi i / T^{(h)}$ と定義し、それに対応して $A_r = M_r^{(h)} e^{\frac{2\pi i}{T^{(h)}} a_r^{(h)}}$ と定義する。これをつかって (7) 式の解は、

$$\nu_r'^{(h)} = M_r^{(h)} e^{-\frac{2\pi i}{T^{(h)}}(t - a_r^{(h)})}$$

と表せるので、$\frac{1}{2} C^{(h)} e^{\frac{2\pi i}{T^{(h)}} \alpha^{(h)}}$ をかけると実数解

$$\nu_r''^{(h)} = C^{(h)} M_r^{(h)} cos \frac{2\pi}{T^{(h)}}(t - a_r^{(h)} - \alpha^{(h)})$$

が求まる。よって一般解は、

$$\nu_r = \sum_{h=1}^{n/2} C^{(h)} M_r^{(h)} cos \frac{2\pi}{T^{(h)}}(t - a_r^{(h)} - \alpha^{(h)})$$

と書き表せる。ただし n 個の任意定数は

$$C', C'', \cdots, C^{(n/2)}; \alpha', \alpha'', \cdots, \alpha^{(n/2)}$$

である。よって n が偶数種のときは $\frac{n}{2}$ 個の周期 $T^{(h)}$ の非減衰振動の重ねあわせで定理 3.5 が証明できた。

3.5 増殖係数 ε_r

今まで述べてきたように平衡点に関する多くの特性を引き出すことができる。

定理 3.6　全種が安定共存の場合、ε_r が正の種と負の種が存在する

(証明)
(2) 式を区間 (t_0, t) で積分すると、

$$\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r - \sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r^0 = \sum_{r=1}^{n}\varepsilon_r\beta_r\int_0^t N_r dt$$

ただし N_r^0 は N_r の時刻 t_0 を表す。
ここで $\exists q_r > 0$ であるので変化有界である。$(g < N(t) < G)$
(A).$\varepsilon_r > 0(\forall r)$ のとき

$$\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r > \sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r^0 + (\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_r\beta_r)gt$$

ここで $t \to \infty$ にしたとき、右辺 $\to \infty$。左辺は変化有界より有界なので矛盾。
(B).$\varepsilon_r < 0(\forall r)$ のとき

$$\sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r < \sum_{r=1}^{n}\beta_r N_r^0 + (\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_r\beta_r)gt$$

ここで $t \to \infty$ にしたとき、右辺 $\to -\infty$。左辺は変化有界より有界なので矛盾。
よって ε_r は正と負の種が存在する。
また (B') 式から、

$$\sum_{s=1}^{n}\varepsilon_r\beta_r q_r$$

となり、$q_r > 0$ なので、ε_r は同一符号ではないことが言える。

参考文献

[1] 非線型減少の数学　山口昌哉著　P 81 - P 97